Visualización y pensamiento matemático

Ricardo Cantoral y Gisela Montiel
rcantor@mail.cinvestav.mx gmontiel@mail.cinvestav.mx
Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México

Resumen

La propuesta didáctica que mostramos en este curso fue desarrollada en un libro dirigido a profesores y continuada en un artículo más en profundidad (Cantoral y Montiel, 2001 y 2002) Dicha propuesta nace en una aproximación teórica de naturaleza sistémica que denominamos *socioepistemología*. Esta aproximación nos permite tratar con los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, al articular la epistemología del conocimiento, con su dimensión socio cultural, con los procesos cognitivos asociados y con los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza.

Tradicionalmente, las aproximaciones epistemológicas han asumido que el conocimiento científico es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas, ignorando, sobremanera, el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales desempeñan en la actividad humana. La socioepistemología por su parte, plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y de su difusión (Cantoral y Farfán, 1998)

Esta propuesta, en términos generales, trata de una forma particular de entender a la visualización de las funciones, aunque en este escrito nos ocuparemos en particular y sólo como un ejemplo, de la construcción del polinomio de interpolación de Lagrange mediante estrategias de visualización. Nos apoyaremos reiteradamente en el concepto de función y en el análisis de sus procesos de enseñanza y aprendizaje. La literatura especializada ha analizado, desde posiciones teóricas diversas, la naturaleza del concepto de función y reporta y analiza una gran variedad de dificultades en su aprendizaje, véase por ejemplo la síntesis que hicieran Dubinsky y Harel, (1992). Por lo que respecta a nuestra propuesta, no abordamos aspectos del tratamiento curricular de los polinomios de Lagrange y de las concepciones que los alumnos desarrollan en su paso por la universidad, sino que presentamos una propuesta didáctica basada en la visualización y en el desarrollo del pensamiento matemático del concepto de función. En nuestra opinión, esta propuesta favorece la evolución de las concepciones entre los alumnos.

Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático

De inicio, señalamos que habremos de entender a la visualización no como el simple acto de ver, pues visualizar una función, por ejemplo, no significa solamente verla, mirar o contemplar su gráfica, de hecho es posible visualizarla sin verla. Así mismo, entenderemos que el pensamiento matemático no se reduce al pensar cuando se está ante una actividad matemática. En un sentido más amplio, entendemos que la visualización es la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. De modo que al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos e incluso para describir experiencias vivenciales, digamos que se requiere del ámbito de lo gestual. Los gestos, sostenemos, anteceden a la palabra y a la representación. La visualización entonces, trata con el funcionamiento de las estructuras cognitivas que se emplean para resolver problemas, con las relaciones abstractas que formulamos entre las diversas representaciones de un objeto matemático a fin de operar con ellas y obtener un resultado, pero sobre todo, precisa de la participación en una cultura particular al compartir símbolos y significados que incluyan lo gestual.

Habremos de decir empero, que cada vez más la visualización se ha convertido en un tópico importante de las diversas escuelas del pensamiento relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Principalmente se le ubica como componente de los procesos mentales que tienen lugar en la actividad matemática, aunque se tiene claro que al relacionarse estrechamente con la percepción se presenta también en diversas situaciones de la vida cotidiana. En este sentido, nos parece que no existe una aproximación teórica dominante en el terreno de la visualización y que las diferentes posturas coinciden en que visualizar no se reduce al acto de ver las diversas representaciones de un objeto matemático.

Para el desarrollo de la matemática misma, como un cuerpo teórico autónomo, es fundamental la visualización pues lo que hoy vemos en la obra matemática puede expresarse en formas analíticas de todos los niveles de complejidad, aunque en sus orígenes esté impregnado de abstracciones y visualizaciones. De Guzmán (1996) señala, por ejemplo, que muchas de las formas de visualización que se experimentan son un verdadero camino de codificación y descodificación que está inmerso en todo un cúmulo de intercambios personales y sociales, buena parte de ellos arraigados profundamente en la misma larga historia de la matemática. Esto implica que la visualización sea un proceso que hay que aprender con las personas a nuestro alrededor y en la inmersión e inculturación en el tejido histórico y social de la matemática. La visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra contemplación que solamente podemos realizar eficazmente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta.

Finalmente, a partir de la perspectiva desarrollada por Piaget al explorar la concepción de espacio que los sujetos desarrollan, se describe a las actividades de visualización, como actividades representacionales del espacio cartesiano. La imagen mental del espacio cartesiano con las que los jóvenes actúan, se forma mediante una reconstrucción activa de los objetos a un nivel simbólico, donde las representaciones mentales no son solamente evocadas por la memoria. En este sentido las investigaciones que hemos desarrollado, han estado interesadas en las transformaciones mentales que van del espacio real al espacio de las representaciones del estudiante, centrando la atención en aquellos atributos de los objetos reales que son invariantes bajo esas transformaciones y cómo ellos cambian con el curso escolar. De acuerdo a esta teoría, las primeras transformaciones del sujeto son aquellas que conservan los atributos topológicos de los objetos tales como interior o exterior de un conjunto, frontera de un conjunto, conexidad o apertura y cerradura de curvas. Sólo después, el sujeto está capacitado para transferir a su espacio representacional atributos euclidianos de los objetos, tales como longitud de las líneas o tamaño de los ángulos. Es ahí donde se presentan ideas sobre la conservación de la longitud, el área o el volumen de los objetos geométricos. En consecuencia, creemos que es entonces donde se construye un verdadero escenario de visualización para las funciones reales de variable real.

Los polinomios de Lagrange: Una exploración visual

En los textos de análisis numérico se define al polinomio de interpolación de Lagrange, correspondiente a $n + 1$ valores dados, como aquella función polinomial de grado a lo más n que toma sobre los $n + 1$ diferentes valores numéricos $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, los $n + 1$ valores dados $\{y_0, y_1, ..., y_n\}$. La explicación que suele hacerse para obtener dicho polinomio atiende naturalmente a la propia orientación teórica del autor. En algunos textos consultados se propone a un polinomio interpolador como una expresión formal $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, en la que los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ quedan determinados por las condiciones del problema, esto es, se pide que satisfagan al siguiente sistema de ecuaciones:

$$a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n = y_0$$
$$a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n = y_1$$
$$\ldots$$
$$a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\ldots+a_nx_n^n = y_n$$

Como se puede constatar en los libros de análisis numérico, la resolución de este problema, produce como resultado la expresión funcional siguiente, a la cual se le asigna el nombre de polinomio de interpolación de Lagrange, o simplemente polinomio de Lagrange:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

La manera en que los autores argumentan sobre el significado de esta última expresión difiere según la orientación teórica de la que partan y naturalmente de la concepción que tengan de lo que es la enseñanza. Algunos por ejemplo, inician con el estudio de casos particulares, mientras que otros tratan directamente con el teorema de existencia y unicidad del polinomio de Lagrange, en tal caso, suelen considerar a los monomios $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ como base canónica del espacio de polinomios. Algunos otros, se ocupan más bien de construir al polinomio de Lagrange a partir del estudio de un caso simple, por ejemplo, piden encontrar un polinomio de tercer grado que satisfaga un conjunto particular de cuatro puntos dados. Otros más en cambio, siguen una ruta ilustrativa, pues enuncian el teorema y diseñan un polinomio particular que cumple con las hipótesis. En esos casos, los autores no suelen utilizar representaciones gráficas ni las explicaciones basadas en la visualización.

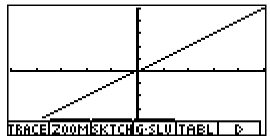
Una opción más, que desarrollaremos en este artículo, consiste en proponer un método explicativo que parta de un problema concreto, pero que use a la visualización como vehículo para construir, por ejemplo, una curva de grado conocido que pase por un conjunto dado de puntos en el plano apoyándonos principalmente en las posibilidades que ofrecen las gesticulaciones de giros, flexiones, desplazamientos, elongaciones, contracciones, traslaciones, evaluaciones a partir de gráficas elementales conocidas por los alumnos. Nuestra estrategia consistirá entonces en construir al polinomio de interpolación de Lagrange inductivamente con base en la visualización, partiremos de una serie de hechos conocidos, tanto de la teoría de ecuaciones como del álgebra básica. Además usaremos un cierto principio de continuidad de las familias de gráficas de funciones polinomiales, que consiste en afirmar que ellas cubren al plano. Por ejemplo, dado una serie de puntos con diferente abscisa sobre el plano cartesiano, existe al menos una función polinomial cuya gráfica pasa por todos ellos. Dichas gráficas son pues flexibles.

Particularmente usaremos esos principios en esta presentación y veremos cómo al apoyarnos en la visualización podremos obtener inductivamente al polinomio de interpolación Lagrange de una manera novedosa.

Una secuencia didáctica particular

Para efectos de este documento mostraremos en detalle el caso del polinomio lineal de Lagrange, destacando la posibilidad de tomar este caso para continuar con el polinomio cuadrático, posteriormente el cúbico, hasta el polinomio de grado n.

Consideremos a la función dada por $f(x) = x$ como una "función primitiva". Como sabemos, su gráfica (Pantalla 3) es una recta que pasa por el punto (0, 0).



Pantalla 1

¿Cómo podremos tener una recta que pase por el punto (4, 0) a partir de la gráfica anterior? (Figura 1).

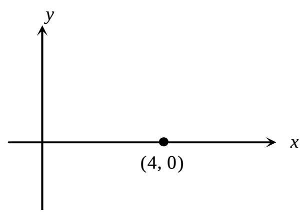
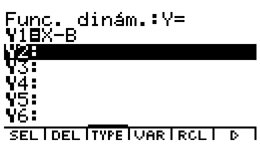


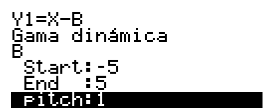
Figura 1

Algunas calculadoras, como la Casio modelo Algebra FX 2.0 (Plus), tienen la posibilidad de graficar funciones en forma dinámica, cambiando sus parámetros. Para el caso de nuestra secuencia, definimos en la calculadora la función Y1=*x*–B (Pantalla 4) para variar el valor del parámetro B (pantalla 5), cambiando de B=-5 hasta B=5, variando de uno en uno (Pantalla 6)



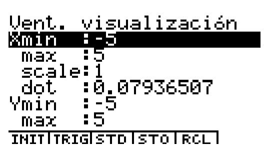
Pantalla 2

Pantalla 3



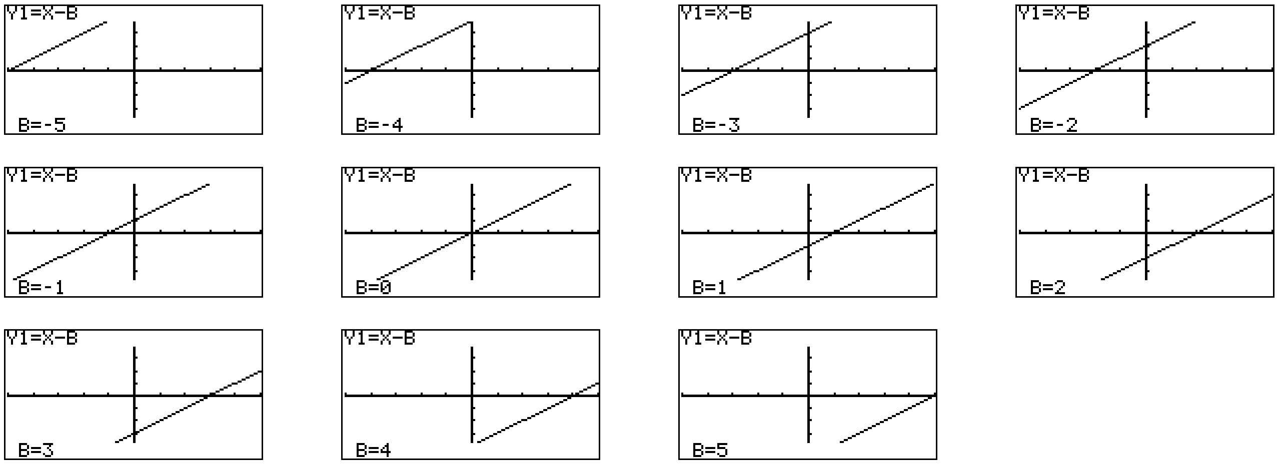
Pantalla 4

Para percibir las gráficas y sus características, definamos la siguiente ventana



Pantalla 5

La calculadora mostrará entonces, mediante una sucesión de gráficas con movimiento, el efecto del parámetro *B*.



Una vez que se percibe el cambio de posición de la recta, es factible contestar a la pregunta ¿cuál es la recta que pasa por el punto (4, 0)? Cabe mencionar que podemos interpretar la transformación $f(x–B) = x–B$ de dos maneras: como la traslación o *movimiento* de la recta $f(x)=x$, B unidades hacia arriba o B unidades hacia la izquierda (si el parámetro B es negativo) o B unidades hacia abajo o a hacia la derecha (si el parámetro B es positivo)

Lo importante de percibir el efecto en un movimiento de esta naturaleza[1] es la posibilidad de explicarlo con un lenguaje común utilizando movimientos corporales que permitan la apropiación de ciertas nociones (familia de funciones, transformaciones lineales, entre otras) Además, es importante reflexionar sobre las propiedades que cambian y aquellas que se mantienen en la gráfica. Por ejemplo, el punto donde la recta intersecta con el eje x cambia, no así la forma como *cruza* o *corta* dicho eje. De igual forma se hace una reflexión respecto del *cruce* o *corte* con el eje y.

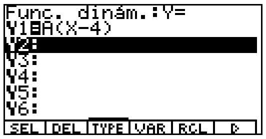
Ahora bien, apoyándonos en el resultado anterior, ¿cómo obtendríamos la recta que pase por los puntos (4, 0) y (6, 4)?

Es claro que esta pregunta se puede resolver directamente mediante la conocida fórmula para la ecuación de la recta $(y-y_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$, ya que disponemos de las coordenadas de dos puntos. Sin embargo la intención de este diseño es la de utilizar sólo estrategias visuales, así que debemos emplear estrategias que permitan rotar una recta que pasa por el punto (4, 0) de manera que pase también por el punto (6, 4), debemos imaginar que “tomamos la recta con las manos y la giramos, apoyada en el punto. (4, 0), hasta que toque al punto (6, 4)”. Para llevar a cabo esto mediante el control que da el instrumento tecnológico, proponemos una segunda actividad con la calculadora.

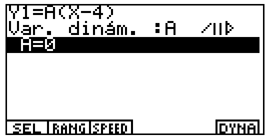
Definimos ahora la función Y1=$A(x–4)$ –Pantalla 6-, para variar el valor del parámetro A (Pantalla 7), cambiando de A=-5 hasta A=5, variando de uno en uno (Pantalla 8), en una ventana como la que muestra la Pantalla 9.

---

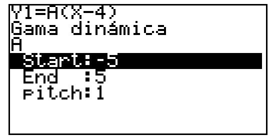
[1] El movimiento puede ser continuo o en pausas (manipulado por el alumno) para un análisis a global o puntual.



Pantalla 6



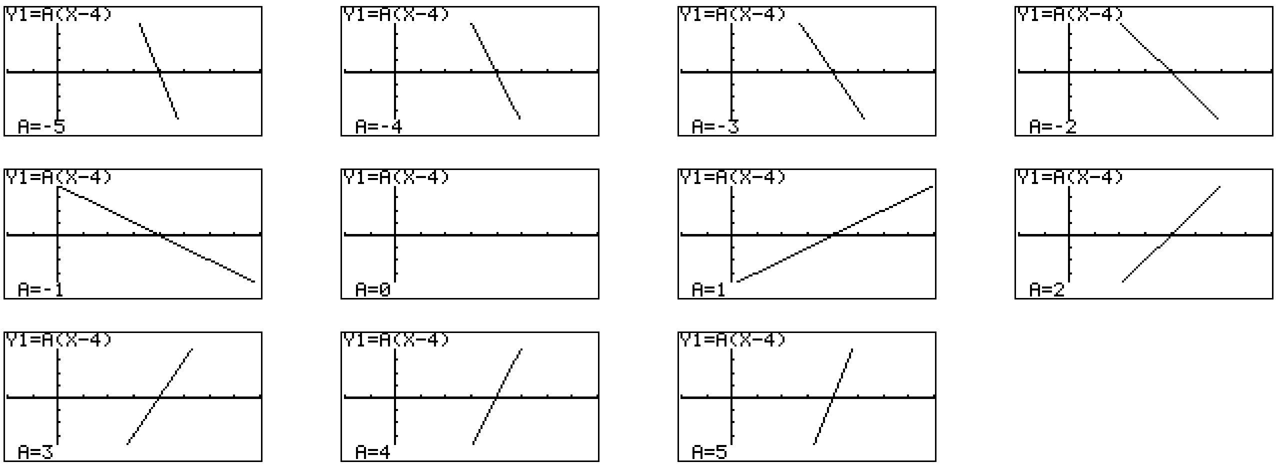
Pantalla 7



Pantalla 8

Pantalla 9

La calculadora mostrará entonces, mediante una sucesión de gráficas con movimiento, el efecto del parámetro *A*.



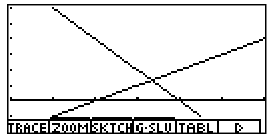
Observemos que al escribir Y1=*A*(*x*–4) mantenemos fijo el punto (4, 0) y giramos la recta sobre ese punto como pivote. Es decir, cuando *x*=4 el producto *A*(*x*–4) será cero sin importar el valor de *A*. Esto es, tomamos en cuenta la prioridad de operaciones Y1=*A*(*x*–4) que nos dice: resta 4 unidades a *x* y luego multiplica por *A*, lo que gráficamente se traduce en *desplazar* o *mover* cuatro unidades a la derecha (o hacia abajo) a la recta Y1=*x* y después *gírala* según el valor de *A*. Si $-1 < A < 1$ la recta se *acerca* al eje *x*, mientras que si $A < -1$ o $A > 1$, la recta se *acerca* al eje *y*. Si definimos en cambio a la función Y1=*Ax*–4, estaríamos girando a la recta Y1=*x* según *A* y posteriormente desplazándola 4 unidades (el proceso inverso).

Pero aún no se contesta la pregunta ¿qué recta pasa por los puntos (4, 0) y (6, 4)?, sabemos sin embargo que la fórmula general de la recta que pasa por el (4, 0) y que tiene la forma Y1=*A*(*x*–4) permite que al ser $x = 6$, $y = 4$ se sustituyen los valores de forma que obtenemos 4=*A*(6–4), de lo cual *A* deberá ser igual a 2. De este modo, la ecuación de la recta pedida es $y = 2(x - 4)$ o bien $y = 2x - 8$.

Hasta ahora hemos podido construir la fórmula de la recta utilizando argumentos de visualización, sabiendo que un punto está sobre el eje *x* y el otro punto fuera de él. Giramos entonces la recta sobre el pivote y usamos un resultado general, la recta toca cualquier otro punto sobre el plano. ¿Cómo obtendríamos ahora la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 8) y (6, 4)?

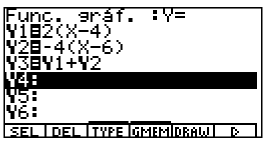
Ahora la estrategia requiere del apoyo que nos brindan los resultados obtenidos en la actividad previa, construyendo dos rectas. En un primer momento a la recta que pase por los puntos (4, 0) y (6, 4), que construimos anteriormente, y en otro a la recta que pasa por los puntos (4, 8) y (6, 0). Esto es, movemos a uno de los puntos sobre el eje de las *x* y dejamos al otro en su posición original, fuera del eje; invertimos los papeles para la otra recta y *voilá!*, sólo falta que sumemos a las dos funciones así obtenidas.

Tenemos entonces de este modo a las función $y_1 = 2(x-4)$ y la función $y_2 = -4(x-6)$, cuyas rectas podemos apreciar en la Pantalla 10.

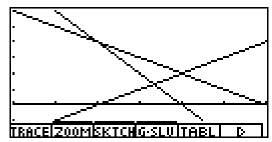


Pantalla 10

Ahora bien, el objetivo es encontrar una gráfica que pase por los puntos inicialmente planteados, para lograrlo *sumaremos las gráficas* tomado como guía los puntos donde ambas rectas cruzan el eje *x*. Esto es, si sumamos ambas rectas en $x = 4$, la función $y_1 = 2(x-4)$ vale cero y la función $y_2 = -4(x-6)$ vale 8, por lo que la suma de ambas es 8. En $x = 6$ la función $y_1 = 2(x-4)$ vale 4 y la función $y_2 = -4(x-6)$ vale 0, por lo que la suma de ambas es 4. De esta forma conseguimos que la función suma pase por los puntos (4, 8) y (6, 4). Veamos en la pantalla de la calculadora las gráficas de las funciones y_1, y_2 y $y_1 + y_2$



Pantalla 11



Pantalla 12

Esta actividad logra, en nuestra opinión, introducir al estudiante en el proceso de visualización de tal forma que en estos momentos se puede construir la función recta con base en información numérica, algebraica y gráfica, usando gesticulaciones: “tomar un punto y bajarlo al eje, sujetar la recta y girarla hasta que toque al otro punto, y así sucesivamente”. Además, otras herramientas de la calculadora (TRACE, Y-Cal, X-Cal, Y-Icpt) permiten comprobar que las rectas encontradas efectivamente pasan por los puntos indicados, o que la suma intercepta a alguna recta en uno de los puntos indicados, etc.

Posterior a la exploración del polinomio cuadrático y cúbico conviene tratar una generalización para construir el polinomio de aproximación de Lagrange en su forma escolar.

Referencias

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). “Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis”. Epsilon 42, 353 – 369.

Cantoral, R. (1998): “Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: Un programma emergente”. En: B. D'Amore (ed.) *Diversi Aspetti e Diversi Àmbiti della Didattica della Matematica* (pp. 15–24). Pitagora Editrice, Bologna.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2002) Una representación visual del polinomio de interpolación de Lagrange. Enviado.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001): *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. Prentice Hall & Pearson Edución, México.

De Guzmán, M. (1996). *El rincón de la pizarra*. Pirámide, Madrid

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). (1992): *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Notes 25, MAA, Washington.

Kincaid, D. y Cheney, W. (1994): *Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico*. Addison – Wesley Iberoamericana, México.